

**Санкт-Петербургский государственный  
университет телекоммуникаций**

**Имитационное  
моделирование  
в проектировании и  
технологии изготовления  
электронных средств**

**Профессор кафедры КПРС  
доктор технических наук, профессор  
Савищенко Николай Васильевич**

**Санкт-Петербургский государственный  
университет телекоммуникаций**

**Лекция**  
**Концепция дискретных  
систем для имитационного  
моделирования**

**Профессор кафедры КПРС  
доктор военных наук, профессор В.Д. Боев**

# Учебные цели занятия

---



## Изучить:

- **основные понятия, классификацию, параметры и характеристики систем и сетей массового обслуживания.**

- 1. Основные понятия.**
- 2. Классификация моделей систем массового обслуживания.**
- 3. Параметры и характеристики систем массового обслуживания.**

- Боев В. Д., Сыпченко Р. П. Компьютерное моделирование. Элементы теории и практики: Учеб. пособие. — СПб.: ВАС, 2009. — 436 с.
- Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.
- Боев В. Д., Сыпченко Р. П. Компьютерное моделирование. Элементы теории и практики: Курс лекций. — ИНТУИТ.ru, 2010.



# Введение

Изучение процессов, протекающих в дискретных системах со стохастическим характером функционирования, проводится в рамках *теории массового обслуживания (ТМО)* и *теории случайных процессов*. При этом многие модели реальных систем строятся на основе **моделей массового обслуживания (ММО)**, которые делятся на **базовые модели** в виде *систем массового обслуживания* и **сетевые модели** в виде *сетей массового обслуживания*, представляющие собой математические объекты, описываемые в терминах соответствующего математического аппарата.

# 1. Основные понятия



***Система массового обслуживания (СМО)*** – математический (абстрактный) объект, элементами которого являются:

- **входной (входящий) поток требований (заявок) на обслуживание;**
- **приборы (каналы) обслуживания;**
- **очередь заявок, ожидающих обслуживания;**
- **выходной (выходящий) поток обслуженных заявок;**
- **поток не обслуженных заявок.**

# 1. Основные понятия

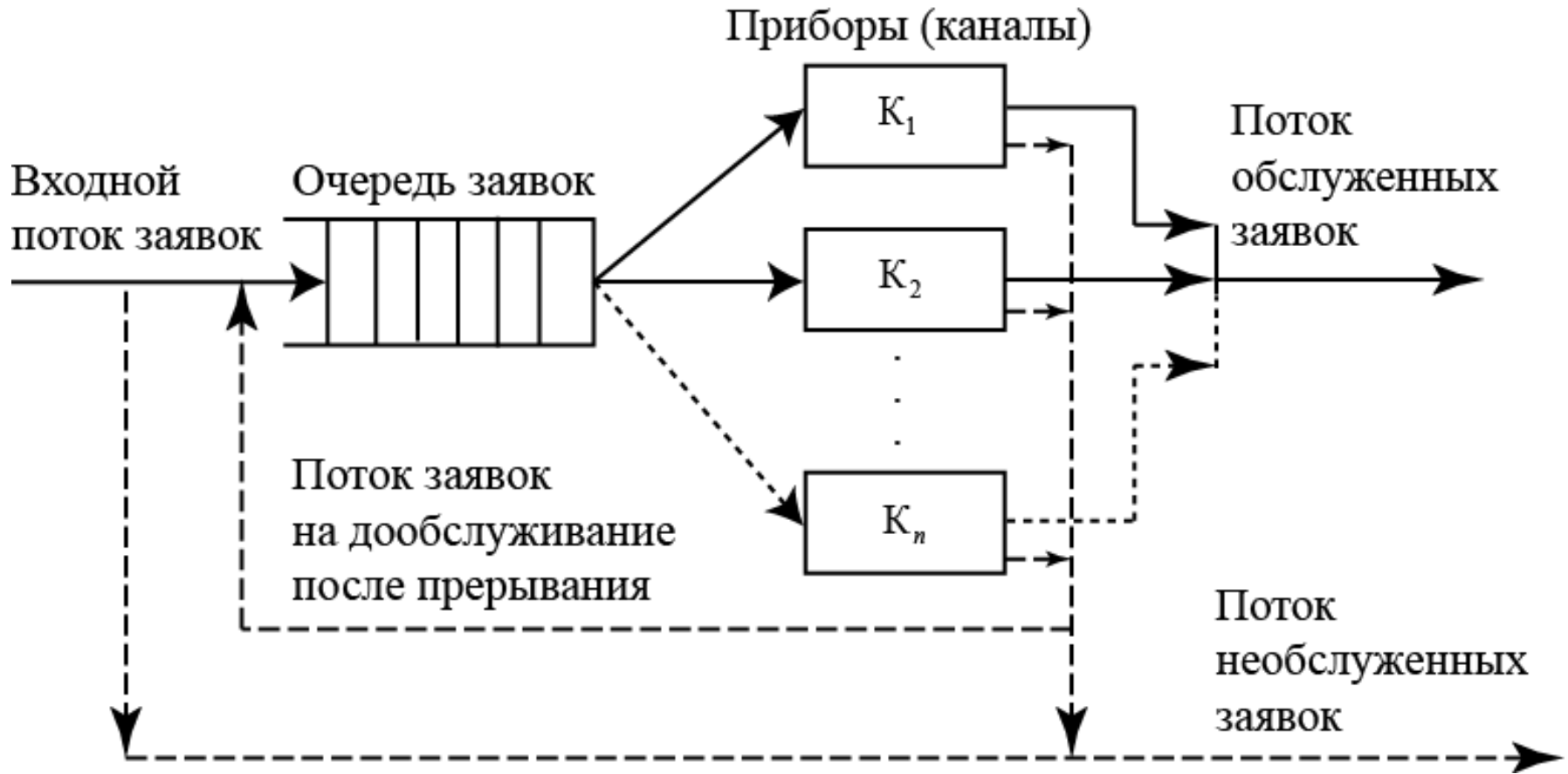


Рис. 2.1. Система массового обслуживания



# 1. Основные понятия

- **Заявка (требование, запрос, вызов, клиент, сообщение, пакет)** – объект, поступающий в СМО и требующий обслуживания в обслуживающем приборе. Совокупность заявок, распределенных во времени, образуют **входной поток заявок**.
- **Обслуживающий прибор** или просто **прибор (устройство, канал, линия)** – элемент СМО, функцией которого является обслуживание заявок.

# 1. Основные понятия

- **Обслуживание** – задержка заявки на некоторое время в обслуживающем приборе.
- **Длительность обслуживания** – время задержки (обслуживания) заявки в приборе.
- **Накопитель (буфер)** – совокупность мест для ожидания заявок перед обслуживающим прибором.
- Количество мест для ожидания определяет **ёмкость накопителя**.

# 1. Основные понятия

- Заявки, находящиеся в накопителе (буфере) и ожидающие обслуживания, образуют **очередь** заявок.
- Количество заявок, ожидающих обслуживания в накопителе (буфере), определяет **длину очереди**.
- **Дисциплина буферизации (дисциплина постановки в очередь)** – правило занесения поступающих заявок в накопитель (буфер).
- **Дисциплина обслуживания** – правило выбора заявок из очереди для обслуживания в приборе.
- **Приоритет** – преимущественное право на занесение (в накопитель, буфер) или выбор из очереди (для обслуживания в приборе) заявок одного класса по отношению к заявкам других классов.

# 1. Основные понятия

При рассмотрении СМО, будем использовать следующие **предположения**:

- поступившая в систему заявка **мгновенно** попадает на обслуживание, если прибор свободен;
- в приборе на обслуживании в каждый момент времени может находиться только **одна** заявка;
- после завершения обслуживания какой-либо заявки в приборе очередная заявка выбирается на обслуживание из очереди мгновенно, то есть, другими словами, прибор **не простаивает**, если в очереди есть хотя бы одна заявка.

# 1. Основные понятия

**Сеть массового обслуживания (СМО)** – совокупность взаимосвязанных СМО, в среде которых циркулируют заявки (рис. 2.2,а).

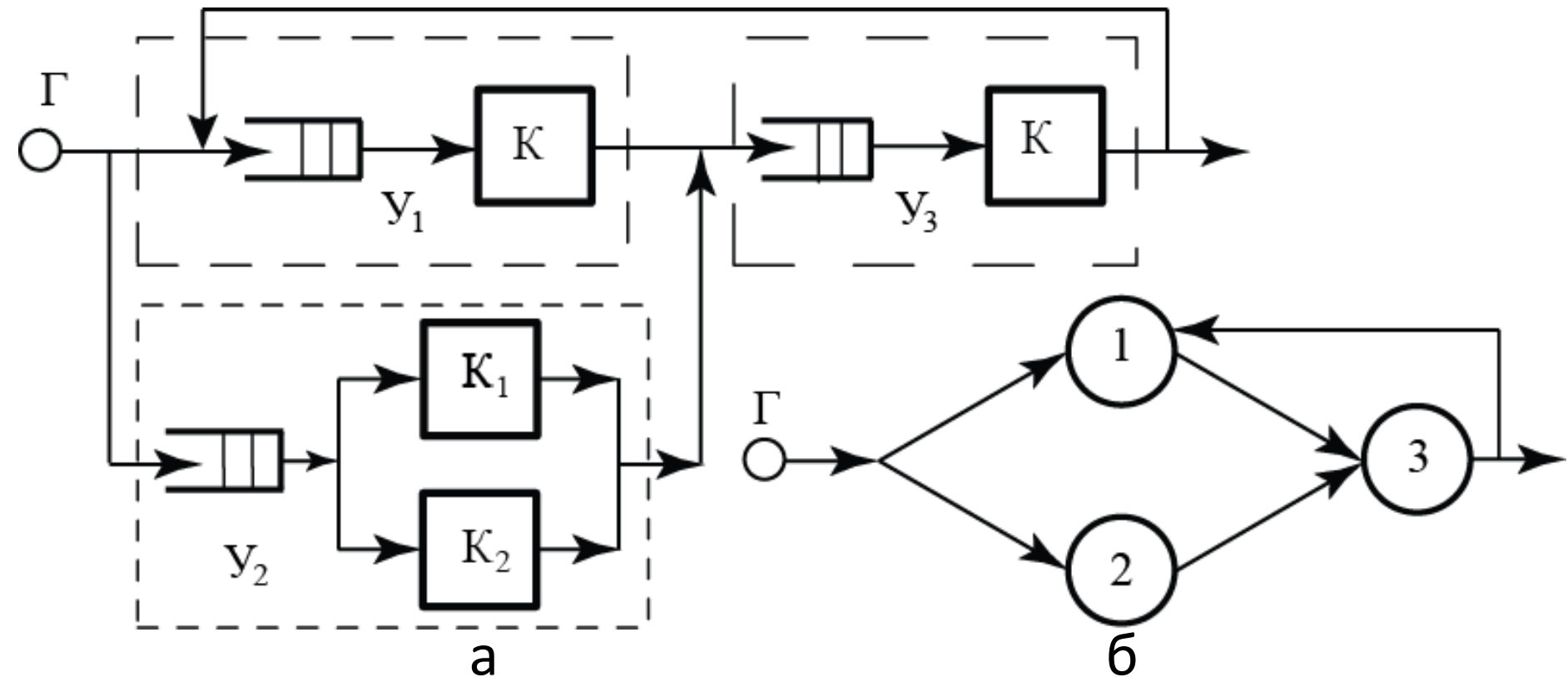


Рис. 2.2. Сеть массового обслуживания

# 1. Основные понятия

Основными элементами СеМО являются узлы (У) и источники (генераторы) заявок (Г).

- **Узел** сети представляет собой систему массового обслуживания.
- **Источник** – генератор заявок, поступающих в сеть и требующих определенных этапов обслуживания в узлах сети.

Для упрощенного изображения СеМО используется граф СеМО.

- **Граф СеМО** – ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам СеМО, а дуги отображают переходы заявок между узлами (рис. 2.2,б).

# Входной (входящий) поток заявок

15

Совокупность событий, распределенных во времени, называется **потоком**. Если событие заключается в появлении заявок, имеем **поток заявок**.

Для описания потока заявок, в общем случае, необходимо задать интервалы времени  $\tau = t_k - t_{k-1}$  между соседними моментами поступления заявок ( $k = 1, 2, \dots, t_0 = 0$  – начальный момент времени).

Основной характеристикой потока заявок является его **интенсивность**  $\lambda$  – среднее число заявок, проходящих через некоторую границу за единицу времени. Величина  $\tau = 1/\lambda$  определяет **средний интервал времени между двумя последовательными заявками**.

# Входной (входящий) поток заявок

16

Поток, в котором интервалы времени  $\tau_k$  между соседними заявками принимают определенные заранее известные значения, называется **детерминированным**.

Если при этом интервалы одинаковы (  $\tau_k = \tau$  для всех  $k = \overline{1, 2, \dots}$  ), то поток называется **регулярным**.

Поток, в котором интервалы времени  $\tau_k$  между соседними заявками представляют собой случайные величины, называется **случайным**.

Случайный поток, в котором все интервалы  $\tau_1, \tau_2, \dots$  между заявками независимы в совокупности и описываются функциями  $F_1(\tau_1), F_2(\tau_2), \dots$  распределений называется потоком **с ограниченным последствием**.



# Входной (входящий) поток заявок



Случайный поток, в котором все интервалы  $\tau_1, \tau_2, \dots$  распределены по одному и тому же закону  $F(t)$ , называется **рекуррентным**.

Поток заявок называется **стационарным**, если интенсивность  $\lambda$  и закон распределения  $F(t)$  интервалов между последовательными заявками не меняются со временем. В противном случае поток заявок является **нестационарным**.

Поток заявок называется **ординарным**, если в каждый момент времени  $t_k$  может появиться только одна заявка. Если в какой-либо момент времени может появиться более одной заявки, то имеем **неординарный** или **групповой** поток заявок.

# Входной (входящий) поток заявок

18

Поток заявок называется потоком *без последствия*, если заявки поступают *независимо* друг от друга, то есть момент поступления очередной заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента.

*Стационарный ординарный поток без последствия называется простейшим.*

Интервалы времени  $\tau$  между заявками в простейшем потоке распределены по *экспоненциальному закону* с функцией распределения  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ , плотностью распределения  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda > 0$  – параметр распределения, представляющий собой интенсивность потока заявок.

# Входной (входящий) поток заявок

Простейший поток часто называют **пуассоновским**, поскольку число заявок  $k$ , поступающих за некоторый заданный промежуток времени  $\Delta t$ , распределено по

**закону Пуассона:**

$$P_k(\Delta t) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot \Delta t},$$

где  $P_k(\Delta t)$  – вероятность поступления ровно  $k$  заявок за некоторый фиксированный интервал времени  $\Delta t$ .

Наибольшее число аналитических результатов получено для простейшего потока заявок, что обусловлено рядом присущих ему замечательных особенностей:

1. Суммирование (объединение) потоков.
2. Вероятностное разрежение потока.
3. Простота.

# Входной (входящий) поток заявок

20

Важной характеристикой входного потока является

**коэффициент вариации**:  $\nu = \sigma / \bar{\tau}_{\text{инт}}$ ,

где  $\bar{\tau}_{\text{инт}}$  – математическое ожидание длины интервала;

$\sigma$  – среднее квадратическое отклонение длины интервала;

Для простейшего потока  $\left( \sigma = \frac{1}{\lambda}, \tau = \frac{1}{\lambda} \right)$ :  $\nu = 1$ .

Для большинства реальных потоков  $0 \leq \nu \leq 1$ . При  $\nu = 0$  поток регулярный, детерминированный.

Коэффициент вариации — характеристика, отражающая степень неравномерности поступления заявок.

Заявки могут иметь разные права на начало обслуживания (разные **приоритеты**). В этом случае говорят, что заявки **неоднородные**.

# Каналы (приборы) обслуживания

Согласно наличию одного или нескольких каналов обслуживания СМО называют одноканальными или многоканальными.

**Многоканальные** СМО могут состоять из однотипных или разнотипных приборов.

Основная характеристика канала — **длительность обслуживания** – время нахождения заявки в приборе – в общем случае величина случайная.

Часто длительность обслуживания заявок предполагается распределенной по **экспоненциальному закону**, что существенно упрощает аналитические выкладки.

# Каналы (приборы) обслуживания

Это обусловлено тем, что процессы, протекающие в системах с экспоненциальным распределением интервалов времени, являются *марковскими*:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad f(t) = \mu e^{-\mu t},$$

где  $\mu$  — **интенсивность обслуживания**;

$\mu = \frac{1}{\tau_{\text{обсл}}}$ ,  $\tau_{\text{обсл}}$  — математическое ожидание времени

обслуживания.

При исследовании СМО выпадает из рассмотрения сущность обслуживания, качество обслуживания.

# Каналы (приборы) обслуживания

Стратегия управления потоками заявок в моделях массового обслуживания задается в виде:

- **дисциплины буферизации;**
- **дисциплины обслуживания.**

Дисциплины буферизации и обслуживания могут быть классифицированы по следующим признакам:

- наличие приоритетов между заявками классов;
- способ (режим) вытеснения заявок из очереди (для дисциплин буферизации) и назначения заявок на обслуживание (для дисциплин обслуживания);
- правило вытеснения или выбора заявок на обслуживание;
- возможность изменения приоритетов.

# Каналы (приборы) обслуживания



Рис. 2.3. Вариант классификации дисциплин буферизации (постановки в очередь)



# Каналы (приборы) обслуживания



Часто ёмкость накопителя в моделях предполагается неограниченной, несмотря на то, что в реальной системе соответствующая ёмкость ограничена. Такое предположение оправдано в тех случаях, когда вероятность потери заявки в реальной системе из-за переполнения ограниченной ёмкости накопителя меньше  $10^{-3}$ , поскольку в этом случае дисциплина практически не влияет на характеристики обслуживания заявок.

# Каналы (приборы) обслуживания

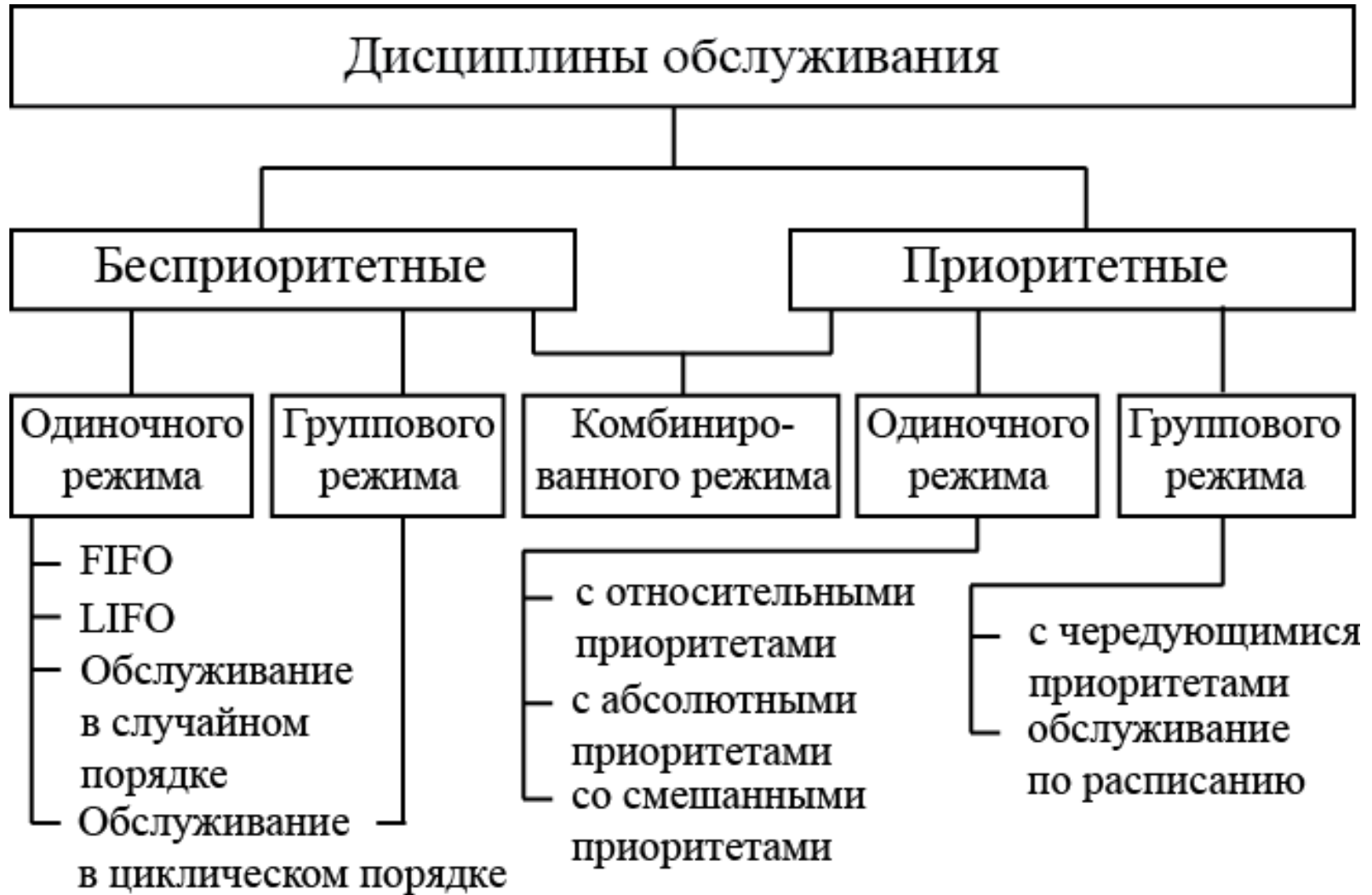


Рис. 2.4. Вариант классификации дисциплин обслуживания

# Каналы (приборы) обслуживания



Среди представленных дисциплин обслуживания особое место занимают дисциплины со смешанными приоритетами, обладающие общностью по отношению к перечисленным дисциплинам обслуживания одиночного режима.

Для математического описания дисциплин обслуживания со смешанными приоритетами используется **матрица приоритетов**, представляющая собой квадратную матрицу:  $Q = [q_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ ,  $N$  – число классов заявок, поступающих в систему.

Элемент матрицы задает приоритет заявок класса  $i$  по отношению к заявкам класса  $j$  и может принимать следующие значения: 0 – нет приоритета; 1 – приоритет относительный; 2 – приоритет абсолютный.

# Каналы (приборы) обслуживания

В зависимости от *возможности изменения приоритетов* в процессе функционирования системы приоритетные дисциплины буферизации и обслуживания делятся на два класса:

- ***со статическими приоритетами***, которые не изменяются со временем;
- ***с динамическими приоритетами***, которые могут изменяться в процессе функционирования системы в зависимости от разных факторов, например, при достижении некоторого критического значения длины очереди заявок какого-либо класса, обладающего низким приоритетом, ему может быть предоставлен более высокий приоритет.

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

При моделировании реальных систем с дискретным характером функционирования широкое применение находят базовые модели в виде СМО, которые могут быть классифицированы (рис.2.5):

- по числу мест в накопителе;
- по числу обслуживающих приборов;
- по количеству классов заявок, поступающих в СМО.

# 2. Классификация моделей массового обслуживания

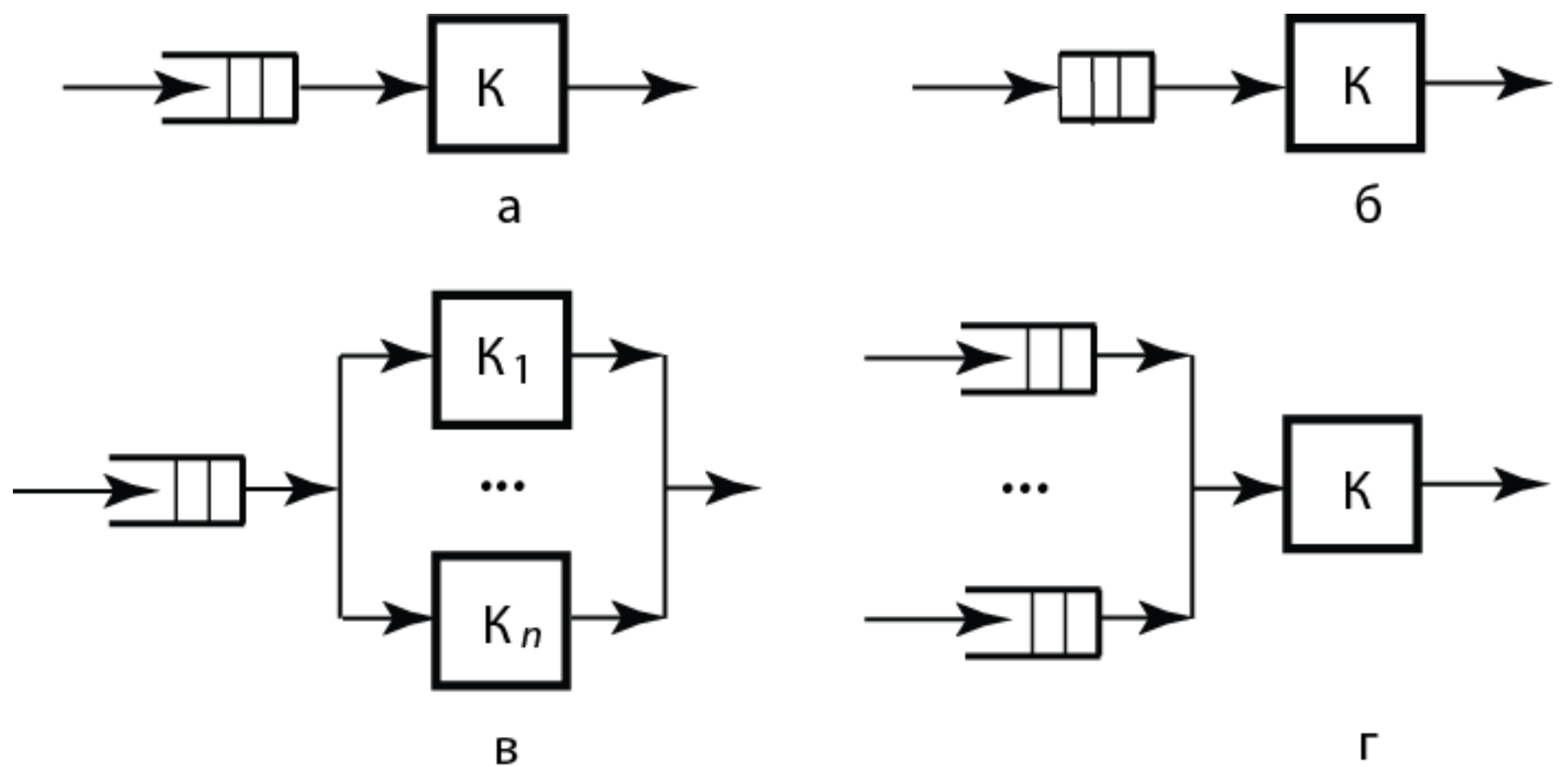


Рис. 2.5. Базовые модели СМО

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

По *числу мест в накопителе* СМО делятся на системы:

- **без накопителя (СМО с отказами)**, в которых заявка, поступившая в систему и заставшая все обслуживающие приборы занятыми обслуживанием более высокоприоритетных заявок, получает отказ и теряется;
- **с накопителем ограниченной ёмкости (СМО с потерями)** (рис. 2.5, б), в которых поступившая заявка теряется, если она застаёт накопитель заполненным полностью;
- **системы с накопителем неограниченной ёмкости (СМО без потерь)** (рис. 2.5, а, в, г).

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

По *количеству обслуживающих приборов* СМО делятся на:

- **одноканальные** (рис. 2.5, а, б, г), содержащие один прибор (канал)  $K$ ;
- **многоканальные** (рис. 2.5, в), содержащие  $K$  – более одного обслуживающих приборов.

В многоканальных СМО обычно предполагается, что все приборы идентичны и равнодоступны для любой заявки.



# 2. Классификация моделей массового обслуживания

По *количеству классов (типов) заявок*, поступающих в СМО, различают системы:

- **с однородным потоком** заявок (рис. 2.5, а, б, в);
- **с неоднородным потоком** заявок (рис. 2.5, г).

В СМО, представляющей собой абстрактную математическую модель, *заявки относятся к разным классам* в том случае, если они в моделируемой реальной системе различаются хотя бы одним из следующих факторов:

- *длительностью обслуживания;*
- *приоритетами.*

# 2. Классификация моделей массового обслуживания



Рис. 2.6. Вариант классификации СеМО

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

В зависимости от *характера процессов поступления и обслуживания заявок* в сети СеМО делятся на:

- **стохастические**, в которых интервалы времени между поступающими заявками и/или длительности их обслуживания в узлах представляют собой случайные величины, описываемые соответствующими законами распределений;
- **детерминированные**, в которых интервалы времени между поступающими заявками и длительности их обслуживания в узлах являются детерминированными величинами.

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

По виду зависимостей, связывающих интенсивности потоков заявок в разных узлах, СеМО делятся на:

- **линейные**, если эти зависимости линейные;
- **нелинейные**, если эти зависимости являются нелинейными.

В *линейных* СеМО интенсивность потока заявок в узел  $j$  связана с интенсивностью потока заявок в узел  $i$  линейной зависимостью:  $\lambda_j = \alpha_{ij} \cdot \lambda_i$ , где  $\alpha_{ij}$  – коэффициент пропорциональности, показывающий, во сколько раз отличаются интенсивности потоков заявок в узел  $j$  и в узел  $i$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

В *нелинейных* СеМО интенсивности потоков заявок в узлах связаны нелинейными зависимостями, что значительно усложняет их исследование.

*Нелинейность* СеМО может быть обусловлена:

- *потерей заявок* в сети, например из-за ограниченной емкости накопителей в узлах;
- *размножением заявок* в сети, заключающимся, например, в формировании нескольких новых заявок после завершения обслуживания некоторой заявки в одном из узлов сети.

Таким образом, **СеМО является линейной, если в ней заявки не размножаются и не теряются.**

# 2. Классификация моделей массового обслуживания

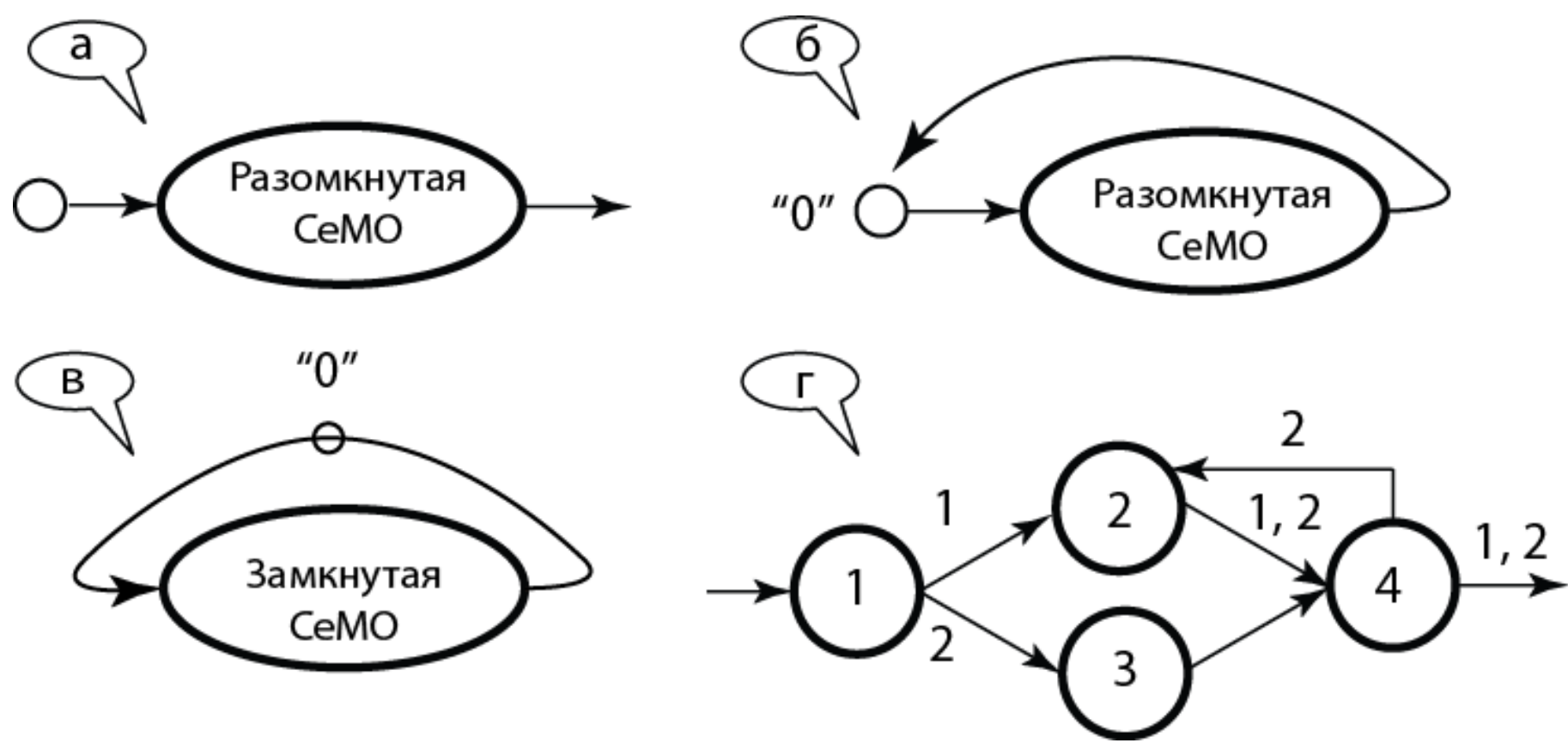


Рис. 2.7. Виды CeMO по числу циркулирующих заявок

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

**Разомкнутая (открытая) СеМО** содержит один или несколько *внешних независимых источников* заявок, которые генерируют заявки в сеть независимо от числа заявок, находящихся в сети (рис.2.7, а). В разомкнутой СеМО одновременно может находиться *любое число заявок*, в том числе, и сколь угодно большое, то есть от 0 до бесконечности.

С разомкнутой СеМО связана внешняя среда, из которой поступают заявки в сеть и в которую они возвращаются после обслуживания в сети. Внешняя среда обозначается обычно как нулевой узел «0», рис. 2.7,б.

## 2. Классификация моделей массового обслуживания

**Замкнутая (закрытая) СеМО** не содержит *независимых внешних* источников заявок и характеризуется тем, что в ней циркулирует *постоянное число заявок  $M$*  (рис. 2.7, в).

**Замкнуто-разомкнутая СеМО (комбинированная)** представляет собой комбинацию замкнутой СеМО и разомкнутой СеМО, в которую, кроме постоянно циркулирующих в сети  $M^*$  заявок, из внешнего независимого источника поступают заявки такого же или другого класса, при этом суммарное число заявок в сети  $M \geq M^*$ .



## 2. Классификация моделей массового обслуживания

По *типу циркулирующих заявок* различают СеМО:

- **однородные**, в которых циркулирует один класс заявок (однородный поток заявок);
- **неоднородные**, в которых циркулирует несколько классов заявок (неоднородный поток заявок), различающихся хотя бы одним из следующих факторов: *длительностями обслуживания в узлах; приоритетами; маршрутами.*

Маршруты заявок разных классов задаются путем указания номеров классов заявок на соответствующих дугах сети (рис. 2.7, г).

# 3. Параметры и характеристики СМО

Для описания СМО используются три группы параметров: структурные; нагрузочные; функциональные параметры (параметры управления).

К **структурным параметрам** относятся:

- *количество обслуживающих приборов  $n$* , равное 1 для одноканальной СМО и  $n > 1$  для многоканальной СМО;
- *количество  $m$  и ёмкости накопителей  $E_j$  ( $j = \overline{1, m}$ )*;
- *способ взаимосвязи накопителей с приборами* (в случае многоканальных СМО), например в виде матрицы связей.

# 3. Параметры и характеристики СМО

**Нагрузочные параметры** СМО включают в себя:

- количество поступающих в систему классов заявок  $N$ , которое равно 1 для СМО с однородным потоком заявок и  $N > 1$  для СМО с неоднородным потоком;
- закон распределения  $F_i(t)$  интервалов времени между поступающими в систему заявками класса  $i = 1, N$  или интенсивности  $\lambda_i$  и коэффициента вариации  $V_i$  интервалов;
- закон распределения  $F_i(t)$  длительности обслуживания заявок класса  $i = 1, N$  или средняя длительность  $t_{\text{обсл}}$  или интенсивность  $\mu_i = 1 / t_{\text{обсл}}$  обслуживания и коэффициент вариации  $V_i$ .

# 3. Параметры и характеристики СМО



*Для описания простейшего потока достаточно задать только интенсивность поступления заявок в систему.*

**Функциональные параметры** задаются в виде конкретных стратегий управления потоками заявок в СМО, определяющих правило занесения заявок разных классов в накопители ограниченной ёмкости (дисциплина буферизации) и правило выбора их из очереди на обслуживание (дисциплина обслуживания).

# 3. Параметры и характеристики СМО



*Для описания простейшего потока достаточно задать только интенсивность поступления заявок в систему.*

**Функциональные параметры** задаются в виде конкретных стратегий управления потоками заявок в СМО, определяющих правило занесения заявок разных классов в накопители ограниченной ёмкости (дисциплина буферизации) и правило выбора их из очереди на обслуживание (дисциплина обслуживания).

# 3. Параметры и характеристики СМО



Для компактного описания систем массового обслуживания часто используются обозначения, предложенные Д. Кендаллом, в виде: **A/B/N/L**,

- где **A** и **B** – задают законы распределений соответственно интервалов времени между моментами поступления заявок в систему и длительности обслуживания заявок в приборе;
- **N** – число обслуживающих приборов в системе ( $n = 1, 2, \dots$ );
- **L** – число мест в накопителе, которое может принимать значения 0, 1, 2, ... (отсутствие **L** означает, что накопитель имеет неограниченную ёмкость).

# 3. Параметры и характеристики СМО

Для задания законов распределений **A** и **B** используются следующие обозначения:

- **G** (General) – произвольное распределение общего вида;
- **M** (Markovian) – экспоненциальное (показательное) распределение;
- **D** (Deterministik) – детерминированное распределение;
- **U** (Uniform) – равномерное распределение;
- **E<sub>k</sub>** (Erlangian) – распределение Эрланга  $k$ -го порядка;
- **P** (Pareto) – распределение Парето и т.д.

# 3. Параметры и характеристики СМО



СМО может работать в следующих режимах:

- **установившемся** или **стационарном**, когда вероятностные характеристики системы не изменяются со временем;
- **неустановившемся**, когда характеристики системы изменяются со временем, что может быть обусловлено:
- *началом работы системы*, когда значения характеристик функционирования, меняясь со временем, стремятся в пределе к стационарным значениям (**переходной режим**);
- *нестационарным характером* потока заявок и обслуживания в приборе (**нестационарный режим**).



### 3. Параметры и характеристики СМО

В некоторых системах, например в *СМО с накопителем неограниченной ёмкости*, неустановившийся режим функционирования может быть обусловлен *перегрузкой системы*, когда интенсивность поступления заявок превышает интенсивность обслуживания, и система не справляется с возлагаемой на нее нагрузкой (**режим перегрузки**). При этом характеристики функционирования СМО с течением времени растут неограниченно. В частности, длина очереди перед прибором с течением времени становится всё больше и в пределе стремится к бесконечности.

# Характеристики СМО с однородным потоком заявок



- *нагрузка системы;*
- *коэффициент простоя системы;*
- *вероятность потери заявок;*
- *вероятность обслуживания заявки, то есть вероятность того, что поступившая в систему заявка будет обслужена;*
- *производительность системы, представляющая собой интенсивность потока обслуженных заявок, выходящих из системы;*
- *интенсивность потока потерянных (не обслуженных) заявок из-за ограниченной ёмкости накопителя;*

# Характеристики СМО с однородным потоком заявок

- *среднее время ожидания заявок в очереди;*
- *среднее время пребывания заявок в системе, складывающееся из времени ожидания и времени обслуживания;*
- *средняя длина очереди заявок;*
- *среднее число заявок в системе (в очереди и на обслуживании в приборе).*

# Характеристики СМО с неоднородным потоком заявок

Для СМО с неоднородным потоком заявок, в которую поступают  $N$  классов заявок с интенсивностями  $\mu_1, \dots, \mu_N$  и средними длительностями обслуживания

$t_{1\text{обсл}}, t_{2\text{обсл}}, \dots, t_{N\text{обсл}}$ , определяются две группы

характеристик (показателей) обслуживания заявок:

- характеристики по каждому классу (потoku) заявок;
- характеристики объединённого (суммарного) потока заявок.

Характеристики по каждому классу заявок  $i = \overline{1, N}$  идентичны характеристикам СМО с однородным потоком.

# Характеристики СеМО

Для описания *линейных разомкнутых и замкнутых однородных экспоненциальных СеМО* используется следующая совокупность параметров:

- *число узлов* в сети;
- *число обслуживающих приборов* в узлах сети;
- *матрица вероятностей передач*, где  $P_{ij}$  – вероятность передачи заявки из узла  $i$  в узел  $j$ ;
- *интенсивность источника заявок*, поступающих в разомкнутую СеМО, или *число заявок  $M$* , циркулирующих в замкнутой СеМО;
- *средние длительности обслуживания заявок* в узлах сети.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ